



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
Έως συνέχεια

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(α) \neq f(β)$, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$, $f(β)$, υπάρχει $x_0 \in (α, β)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

(Μονάδες 7)

A2. Πότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας το γράμμα **A**, αν είναι αληθές, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας στο ερώτημα (α).
(μονάδες 3)

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη

λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α) Αν δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι ίσες, τότε $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = +\infty$.

γ) Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\rho_1, \rho_2 \in \Delta$, δύο διαδοχικές ρίζες της f στο διάστημα Δ τέτοιες ώστε $f\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right) < 0$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

δ) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(2024) + f(2025) + f(2026) = 0$, τότε η f δεν είναι συνεχής.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και δεν είναι σταθερή τότε το σύνολο τιμών της $f(\Delta) = [m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο Δ .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h , ώστε:

$$g(x) = 2 \cdot \ln x, \quad x > 0 \text{ και } h(x) = \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (μονάδες 2)

β) $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$. (μονάδες 3)

Μονάδες 5

B2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$.

Μονάδες 4

Αν $f(x) = (h \circ g^{-1})(x) = \ln(1 + e^x), \quad x \in \mathbb{R}$

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 4)

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε για ποιες τιμές το $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \alpha^2$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 3

B5. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ (μονάδες 3)

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot \ln x)$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + e^x, & x \leq 0 \\ e^{-x} - \ln(x + \lambda), & x > 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$

Μονάδες 5

Για $\lambda = 1$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε το ολικό ακρότατο της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο ακριβώς **ετερόσημες** ρίζες ρ_1, ρ_2 .

Μονάδες 6

Γ4. Αν ρ_1 η **αρνητική** ρίζα της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ3, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow \rho_1} \frac{x^2 - e^{2\rho_1}}{\rho_1 x - \rho_1^2}$$

Μονάδες 4

Γ5. Αν ρ_2 η **θετική** ρίζα της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ3, να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow \rho_2} \frac{2025}{e^{-x} - \ln(x+1)}$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^2(x) - 2e^{-x} \cdot |f(x)| = 2e^{-x} + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f(x) + 3} \right) = +\infty$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -3$ (μονάδες 2) και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f

Μονάδες 7

Αν $f(x) = -2e^{-x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$,

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 3), στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \eta\mu\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Δ4. Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2e^x + 7\sin x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_f , C_g έχουν δύο κοινά σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι **αντίθετοι** αριθμοί και ανήκουν στο διάστημα $(-1, 1)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) - f(e^{2x}) \leq f(e^{4x}) - f(e^{3x})$

Μονάδες 4

Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ